Geometria B
Esame 7 giugno 2018
Esercizi di topologia algebrica
e analisi complessa

Esercizio 3.

(Soluzione 3a) Un possibile modo di vedere il problema è immaginare lo spazio X come un tronco di cono “bucato” (i.e. non è presente la base maggiore) come da Figura 1 .

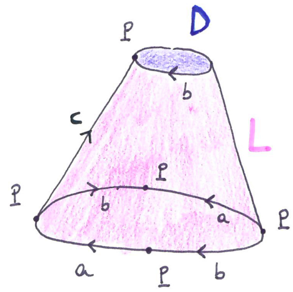

Figura 1: Lo spazio X visto come un tronco di cono.

Se chiamiamo D il disco che forma la base minore, L la superficie laterale e c il lato che unisce le due due circonferenze possiamo interpretare X come un CW-complesso composto da:

- una 0-cella $\{P\}$;
- tre 1-celle $\{a, b, c\}$;
- due 2-celle $\{D, L\}$.

Chiamiamo A il sotto CW-complesso contraibile $\{P, b, D\}$ e sfruttiamo il Teorema 2.18 delle dispense per ottenere la seguente equivalenza omotopica:

$$X \sim X/A.$$

Otteniamo così lo spazio rappresentato in Figura 2.

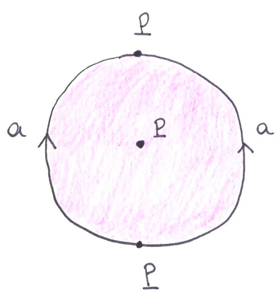

Figura 2: Lo spazio X/A.

Notiamo ora che lo spazio X/A è omotopicamente equivalente ad una sfera con tre punti identificati, che sappiamo essere a sua volta equivalente a $S^2 \vee S^1 \vee S^1$ (si veda anche Figura 3).

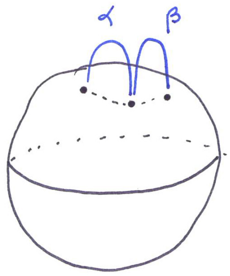

Figura 3: Sfera S^2 con tre punti identificati.

■

(Soluzione 3b) Dal punto *(3a)* è immediato ricavare

$$\pi(X) = \pi(S^2 \vee S^1 \vee S^1) = \langle [\alpha], [\beta] \mid \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

■

Esercizio 4.

(Soluzione 4a) Notiamo per prima cosa che possiamo riscrivere l'integrale semplificando numeratore e denominatore[1]. Otteniamo così il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx.$$

Consideriamo ora la funzione a variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$$

e il cammino Γ (percorso in senso antiorario) unione della semicirconferenza γ, contenuta nel semipiano $\Im m(z) > 0$, di raggio R e centro $(0,0)$ e del segmento $[-R, R]$, con $R \gg 1$. Abbiamo:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(z)dz.$$

La funzione $f(z)$ ha due poli semplici:

$$z_0 = e^{\frac{2}{3}\pi i};$$
$$z_1 = e^{\frac{4}{3}\pi i}.$$

Applicano il teorema dei residui otteniamo:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(f, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Notiamo infine che

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)dz = 0$$

e inoltre

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}.$$

In conclusione dunque:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$$

■

(Soluzione 4b) Sia $f(z) = 3z^2 + 1$. Sfruttando le proprietà della norma otteniamo immediatamente le seguenti disuguaglianze

$$|p(z) - f(z)| = |z^4 + z| \leq 2 \leq |3z^2 + 1| = |f(z)|.$$

[1]Si ricorda che

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Per applicare il teorema di Rouché è necessario verificare che la disuguaglianza sia stretta. A tal proposito, notiamo che

$$|f(z)| = 2 \iff z = \pm i,$$

ma per tali valori abbiamo

$$|p(i) - f(i)| = |p(-i) - f(-i)| = \sqrt{2} < 2$$

Pertanto valgono le ipotesi del teorema di Rouché. Concludiamo quindi che p e f hanno lo stesso numero di radici in $|z| < 1$, i.e. due. Per controllare che non ci sono zeri sul bordo $|z| = 1$ è sufficiente notare che gli zeri di p sono del tipo[2] $z_0, \bar{z}_0$ e $z_1, \bar{z}_1$. In particolare

$$p(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)(z - z_1)(z - \bar{z}_1)$$

da cui

$$|z_0 z_1| = 1.$$

Per quanto visto in precedenza possiamo dedurre che non ci sono radici di modulo 1 (infatti sappiamo che due radici hanno modulo strettamente minore di 1).
Per escludere la possibilità che ci siano radici in $[-1, 1]$ (i.e. reali) notiamo che 1 e -1 non sono zeri di p che per $x \in (-1, 1)$ abbiamo $p(x) > 0$.
Unendo i vari risultati è immediato constatare che in $|z| \leq 1$ il polinomio $p(z)$ ha esattamente due radici e in A ne ha esattamente una. ■

[2]Ricordiamo che se $p(z)$ è un polinomio a coefficienti reali e $z_0 \in \mathbb{C}$ è radice di $p(z)$, allora anche $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ è radice di $p(z)$.